

Практика № 3
20.02.23

1 NP полнота задачи CVP

Цель этого упражнения: доказать NP-полноту задачи нахождения ближайшего вектора (CVP). Для этого сделаем редукцию от задачи о рюкзаке (известная NP-полная задача) к CVP.

Definition 1.1 (Задача о рюкзаке (Subset sum/knapsack)). Пусть на вход даны $a_1, \dots, a_n, s \in \mathbb{Z}$. На выходе задача имеет решение “ДА”, если существуют $x_i \in \{0, 1\}$, такие что $\sum_i x_i a_i = s$; и решение “НЕТ”, иначе.

Покажите, что решение задачи CVP для определенной решетки даёт решение задачи о рюкзаке. Рассмотрим решетку, порожденную столбцами матрицы из входных данных задачи о рюкзаке:

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{(n+1) \times n},$$

и вектор

$$t = \begin{pmatrix} s \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{n+1}.$$

1. Покажите, что если существует решение задачи о рюкзаке, то $\text{dist}(\mathcal{L}(B), t) = \sqrt{n}$.

Отсюда делаем вывод: если $\text{CVP}_1(\mathcal{L}(B), t, r = \sqrt{n})$, то выводим “ДА” для задачи о рюкзаке. Иначе “НЕТ”.

2. Покажите, что $\text{CVP}_1(\mathcal{L}(B), t, r = \sqrt{n})$ выводит “ДА” только для инстанций “ДА” задачи о рюкзаке. То есть, в $\mathcal{L}(B)$ нет других (кроме Bx) ближайших к t векторов. Например, можно показать, что $\text{dist}(Bx', t) > \sqrt{n}$ для $x' \notin \{0, 1\}$.