Алгоритм Просеивания для решения задачи SVP

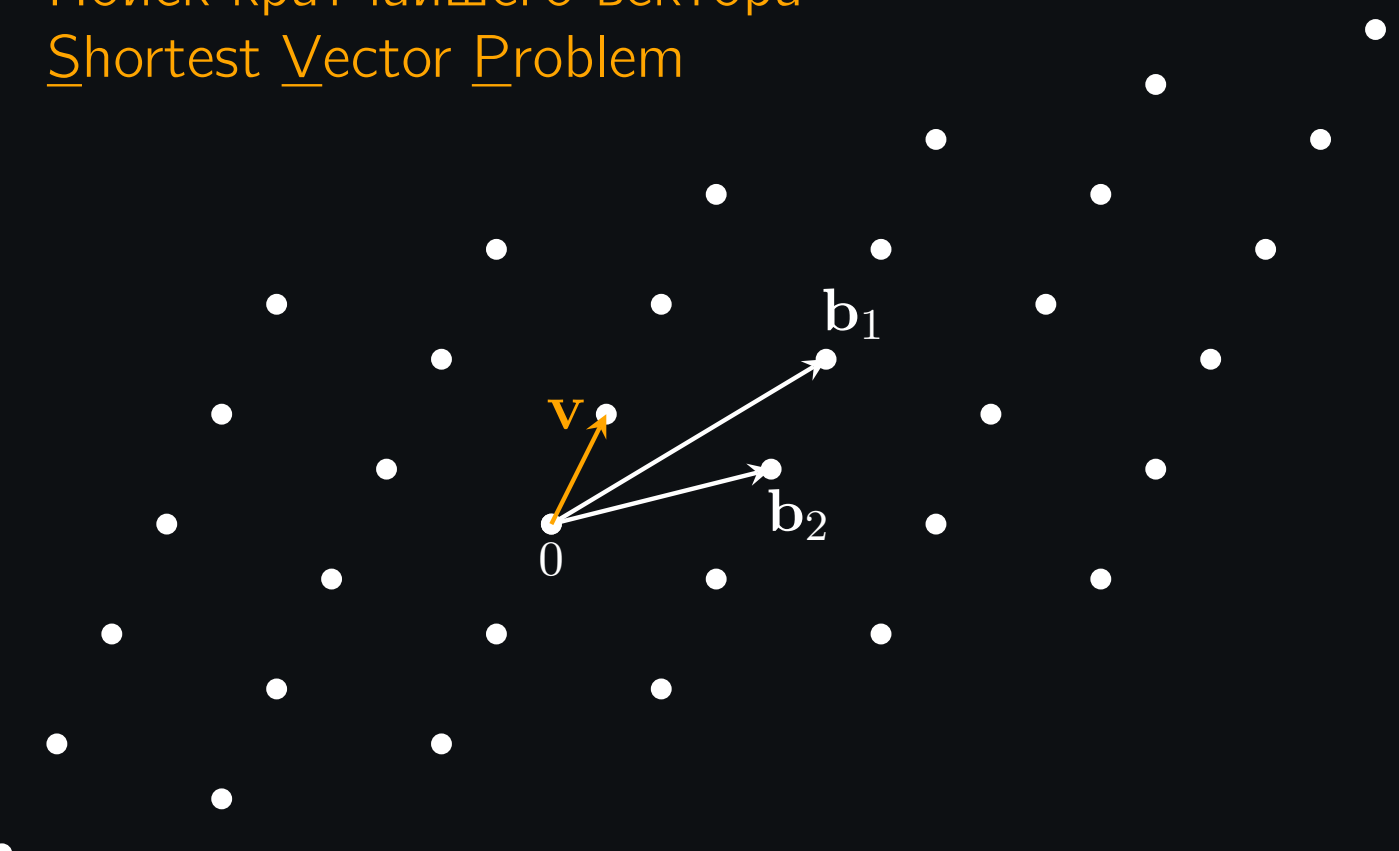
Елена Киршанова

Курс “Криптография на решетках”

Часть I

Задача SVP

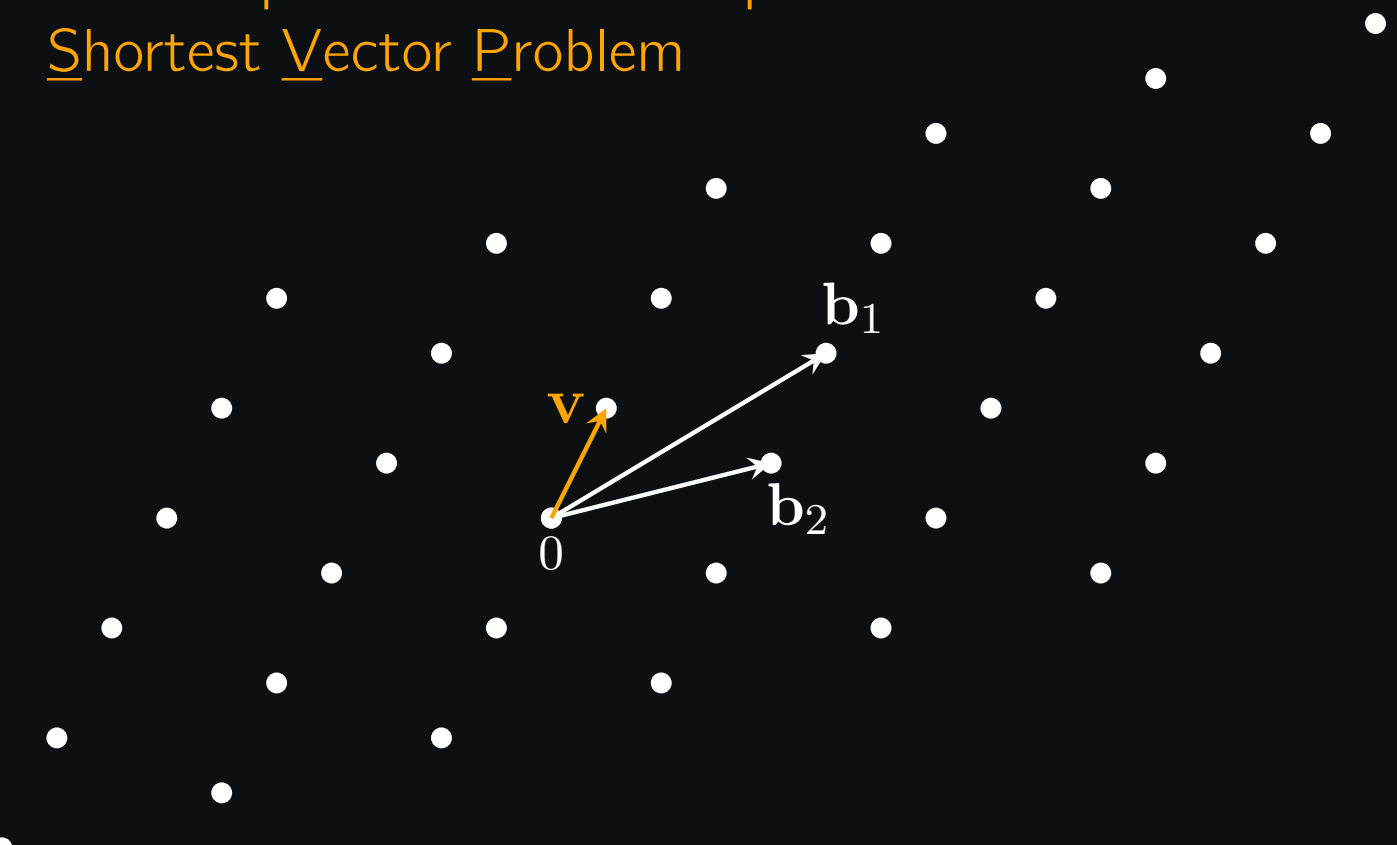
Поиск кратчайшего вектора
Shortest Vector Problem



В задаче поиска кратчайшего вектора (SVP) требуется найти $\mathbf{v}_{\text{shortest}} \in \mathcal{L}$:

$$\|\mathbf{v}_{\text{shortest}}\| = \lambda_1(\mathcal{L})$$

Поиск кратчайшего вектора
Shortest Vector Problem



В задаче поиска кратчайшего вектора (SVP) требуется найти $\mathbf{v}_{\text{shortest}} \in \mathcal{L}$:

$$\|\mathbf{v}_{\text{shortest}}\| = \lambda_1(\mathcal{L})$$

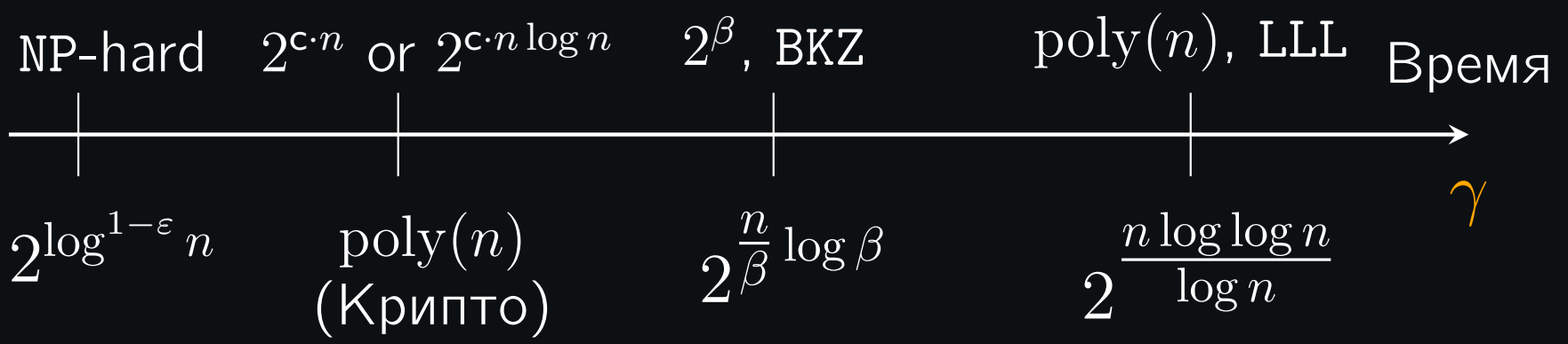
Упрощение: поиск аппроксимации (γ-SVP) к $\mathbf{v}_{\text{shortest}}$:

$$\|\mathbf{v}_{\text{short}}\| \leq \gamma \cdot \lambda_1(\mathcal{L})$$

Асимптотическая сложность SVP ($o()$ опущены)

$$||\mathbf{v}_{\text{shortest}}|| \leq \sqrt{n} \cdot \det(\mathcal{L})^{1/n}$$

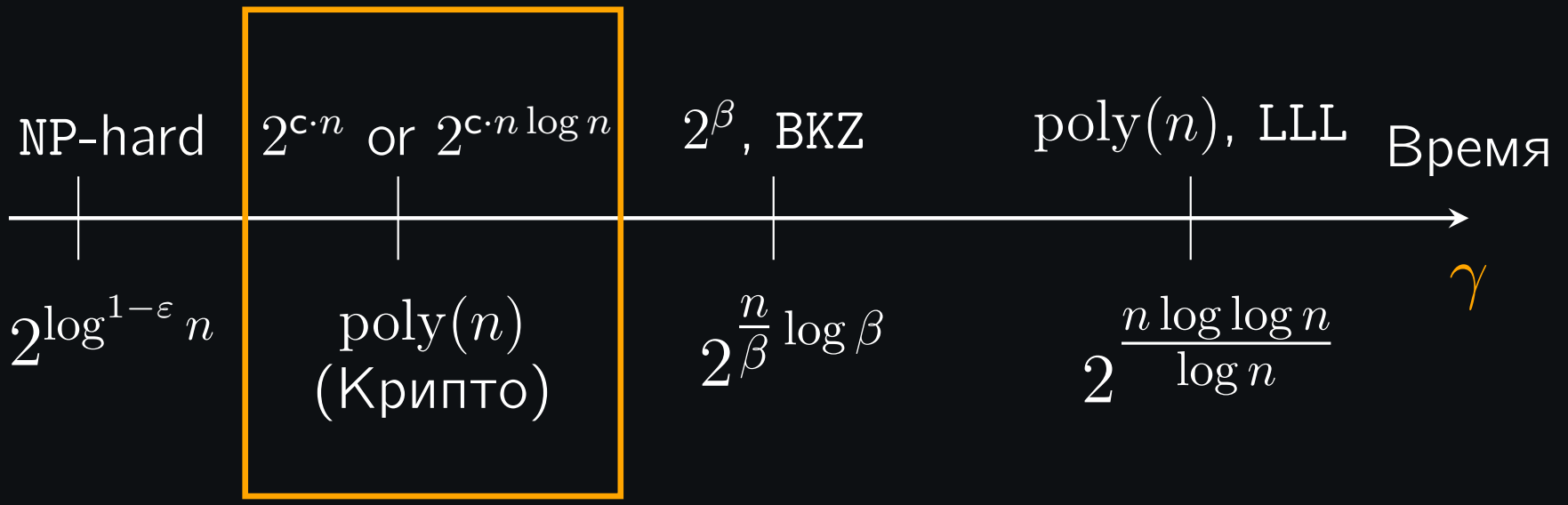
$$||\mathbf{v}_{\text{short}}|| \leq \gamma \cdot ||\mathbf{v}_{\text{shortest}}||$$



Асимптотическая сложность SVP ($o()$ опущены)

$$||\mathbf{v}_{\text{shortest}}|| \leq \sqrt{n} \cdot \det(\mathcal{L})^{1/n}$$

$$||\mathbf{v}_{\text{short}}|| \leq \gamma \cdot ||\mathbf{v}_{\text{shortest}}||$$



- Просеивание (эвристический):
  Время(exactSVP) $= 2^{0.292n}$ Память $= 2^{0.2075n}$
- Перечисление (enumeration):
  Время(exactSVP) $= 2^{(1/2e)n \log n}$ Память $= \text{poly}(n)$

Алгоритмы для SVP

Алгоритм	**Время**	**Память**
Детерминированные алгоритмы:		
Перечисление	$n^{(1/2e)n+o(n)}$	$\mathrm{poly}(n)$
Диаграмма Вороного	$2^{2n+o(n)}$	$2^{n+o(n)}$
Вероятностные алгоритмы:		
Гауссова выборка	$2^{n+o(n)}$	$2^{n+o(n)}$
Просеивание		
– С док-вом	$2^{2.465n+o(n)}$	$2^{1.325n+o(n)}$
– Эвристические:		
– 2-просеивание	$2^{0.415n+o(n)}$	$2^{0.208n+o(n)}$
– 2-просеивание+ LSH	$2^{0.292n+o(n)}$	$2^{0.208n+o(n)}$
– 3-просеивание	$2^{0.396n+o(n)}$	$2^{0.1887n+o(n)}$

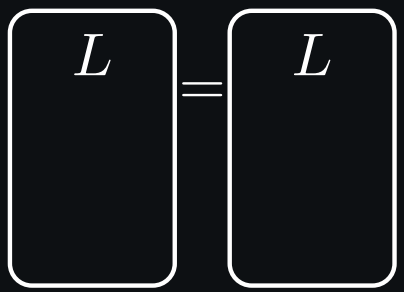
Часть II

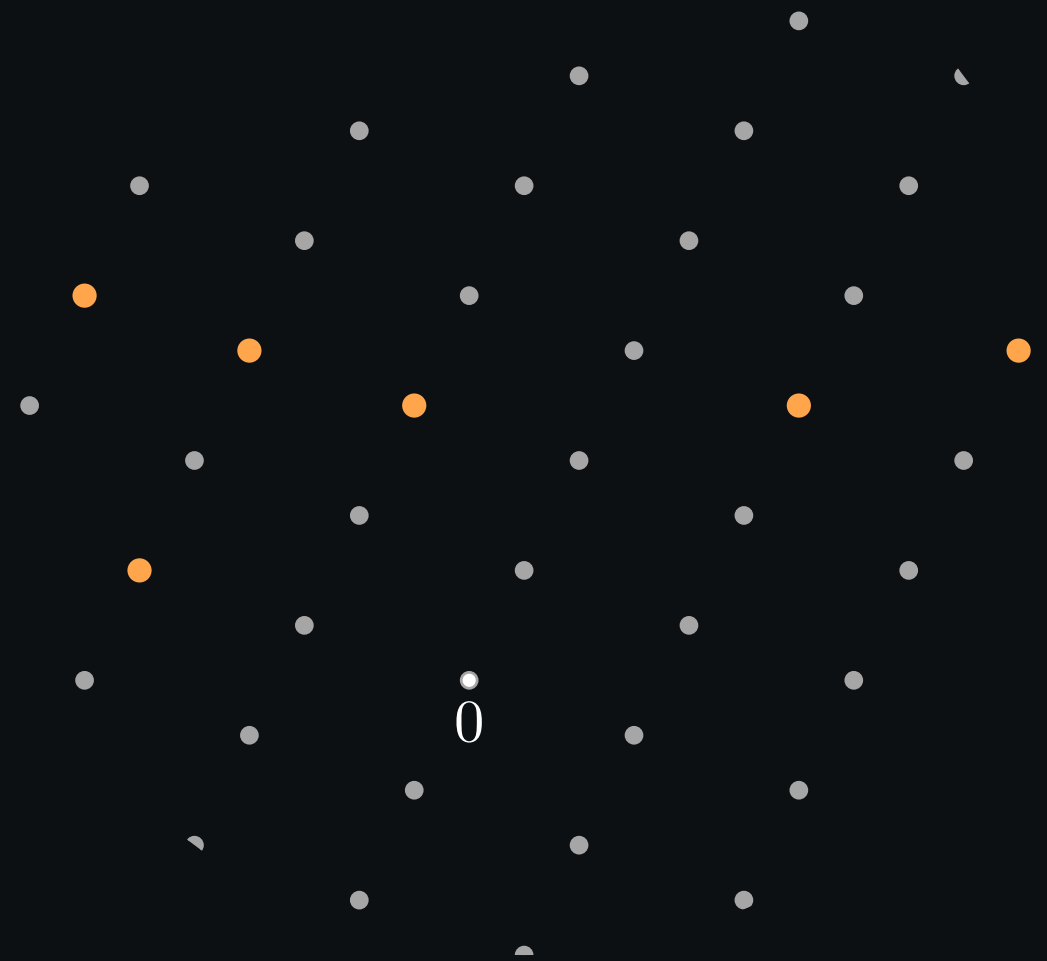
Алгоритмы просеивания

https://sites.google.com/a/x.bestledlights.cf/a223/1-32772214555

2-Просеивание (Nguyen-Vidick)

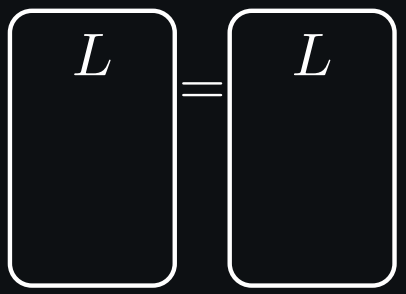
Идея: насыщать пространство векторами решётки так, чтобы суммы их пар давали короткие вектора

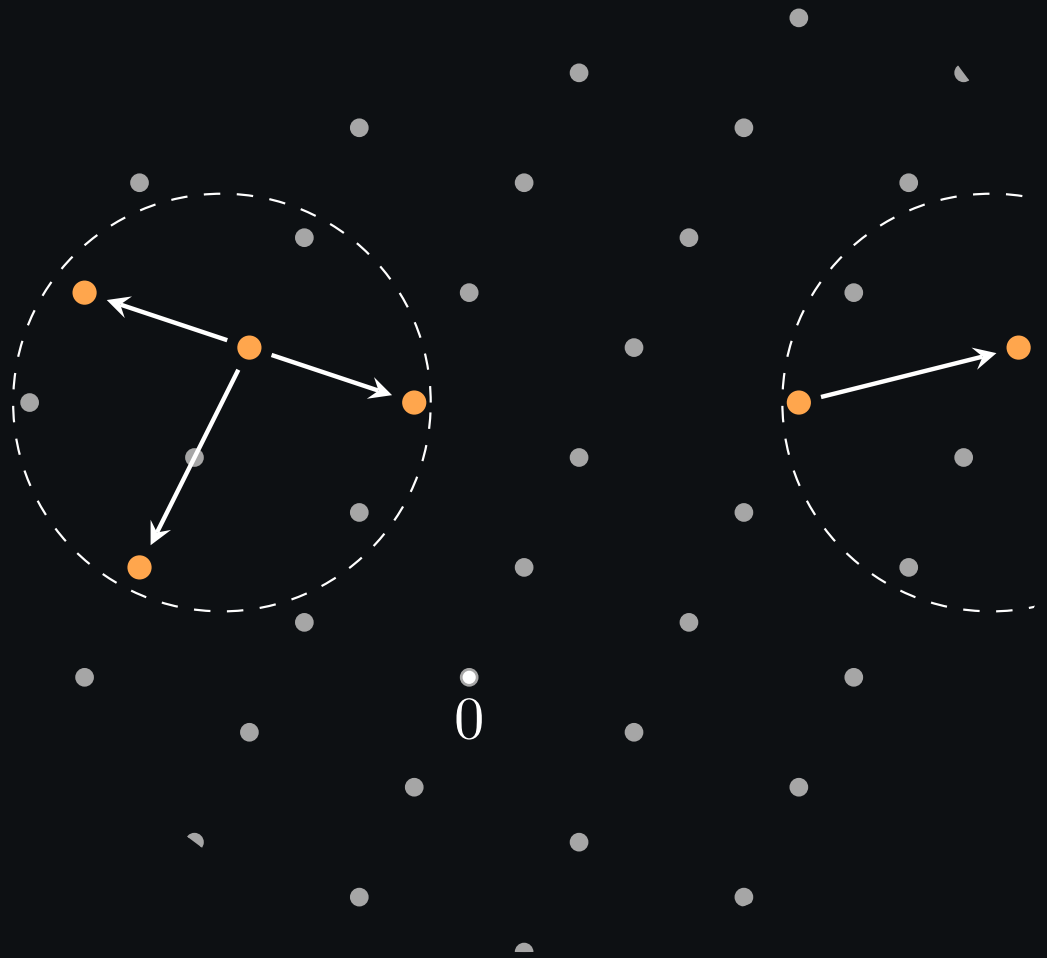




2-Просеивание (Nguyen-Vidick)

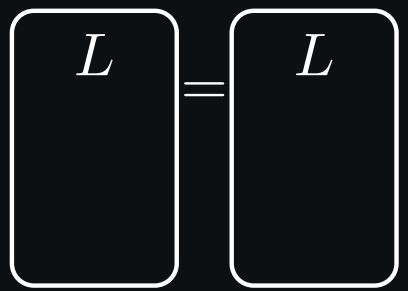
Идея: насыщать пространство векторами решётки так, чтобы суммы их пар давали короткие вектора





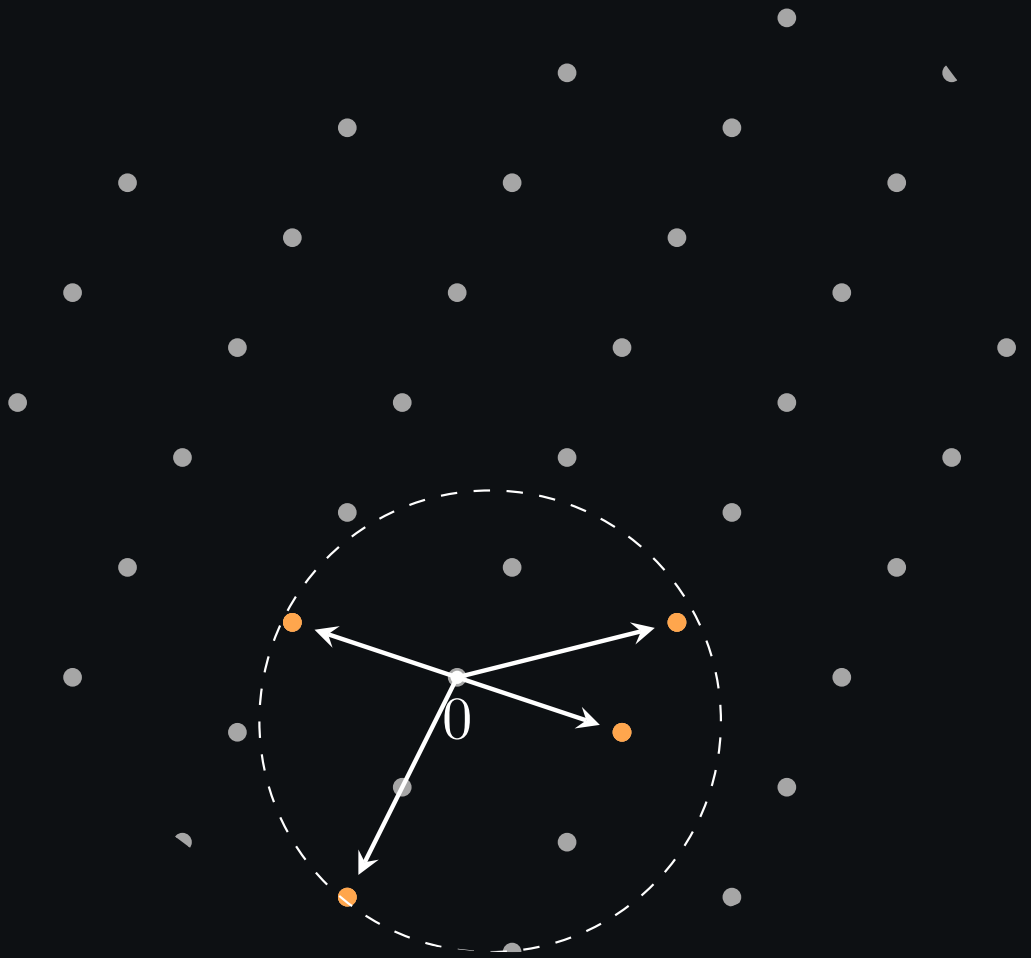
2-Просеивание (Nguyen-Vidick)

Идея: насыщать пространство векторами решётки так, чтобы суммы их пар давали короткие вектора



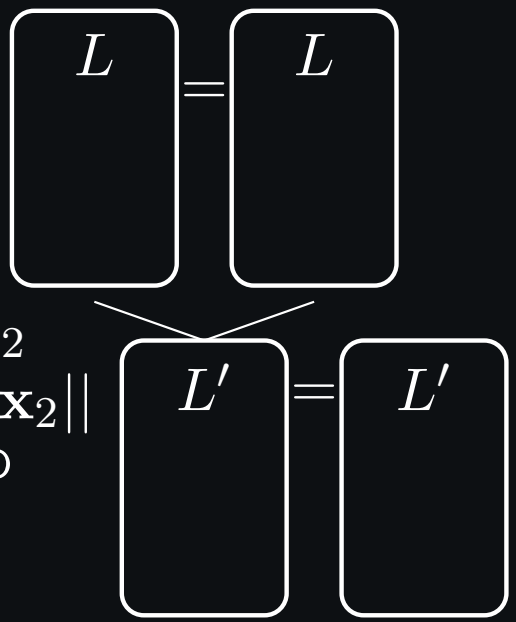
$\mathbf{x}_1 \pm \mathbf{x}_2$

$||\mathbf{x}_1 \pm \mathbf{x}_2||$ – мало



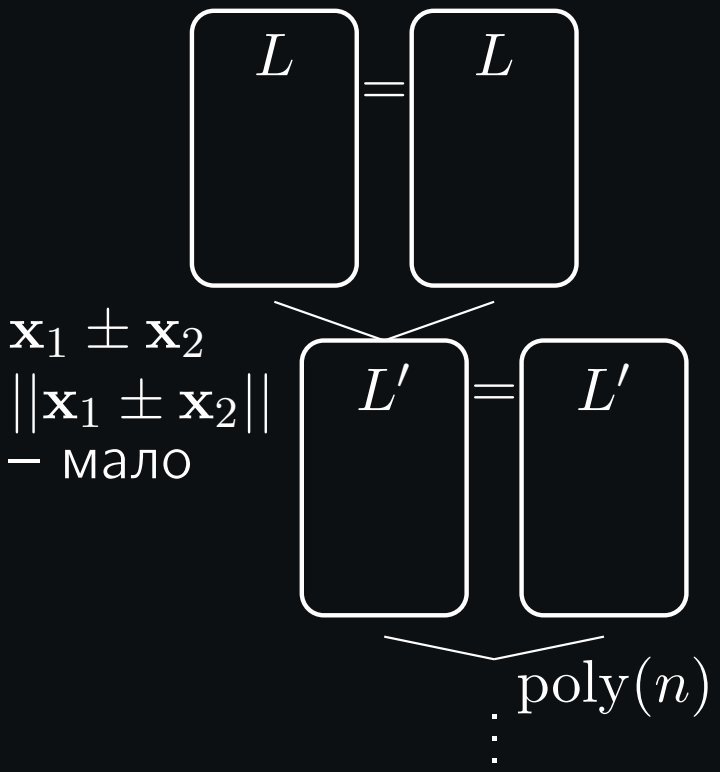
2-Просеивание (Nguyen-Vidick)

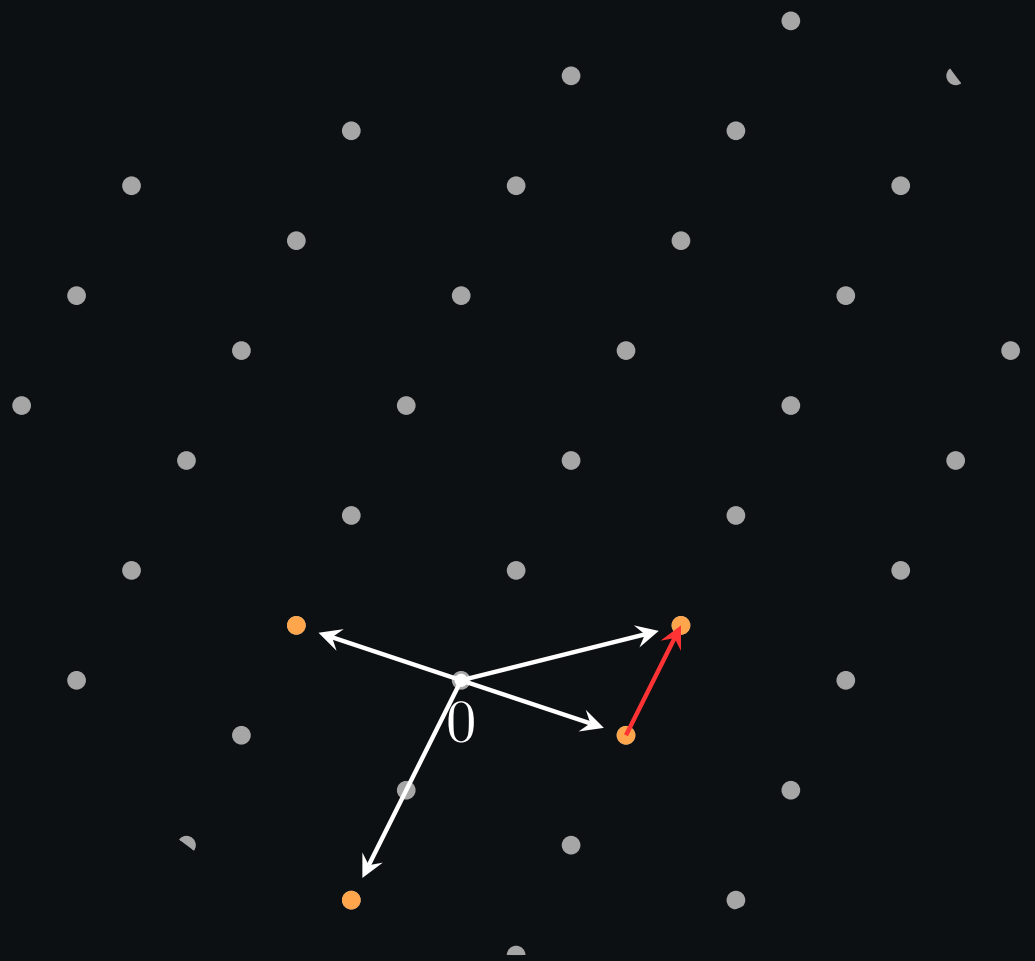
Идея: насыщать пространство векторами решётки так, чтобы суммы их пар давали короткие вектора



2-Просеивание (Nguyen-Vidick)

Идея: насыщать пространство векторами решётки так, чтобы суммы их пар давали короткие вектора

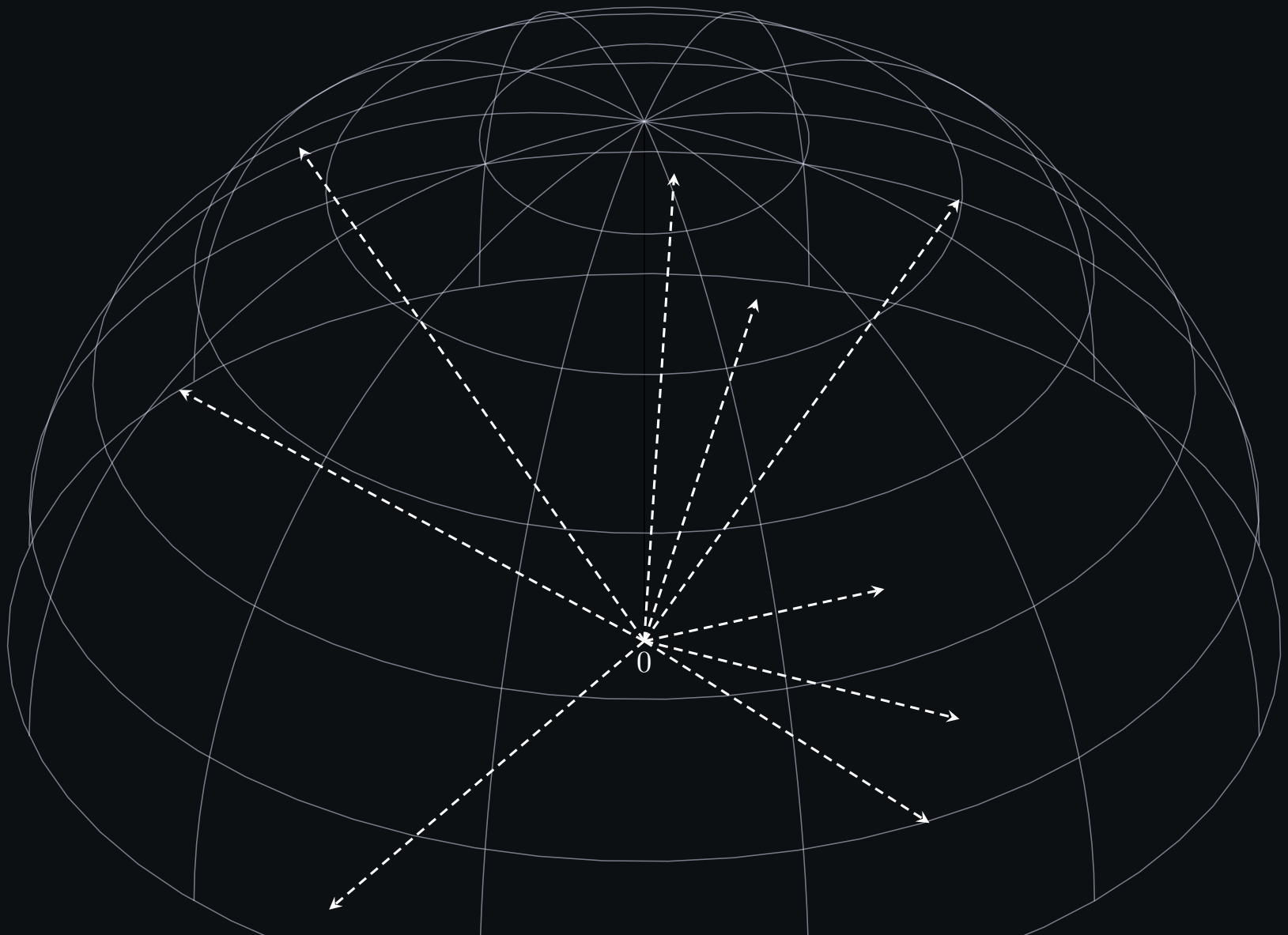




Насколько большим должно быть $|L|$?

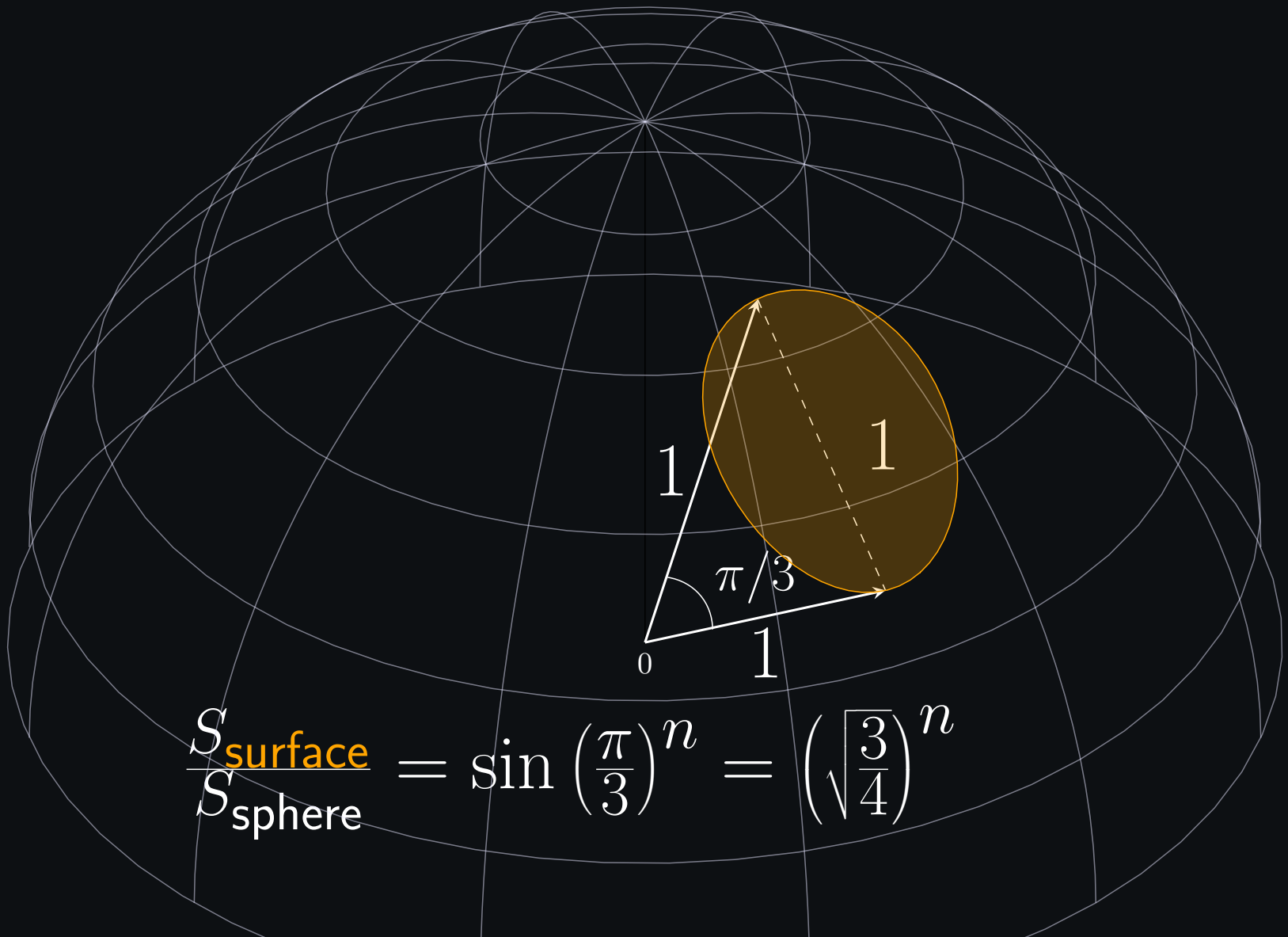
Насколько большим должно быть $|L|$?

Предположение: вектора (нормализованные) в $|L|$ равномерно независимо распределены в S^{n-1}.



Насколько большим должно быть $|L|$?

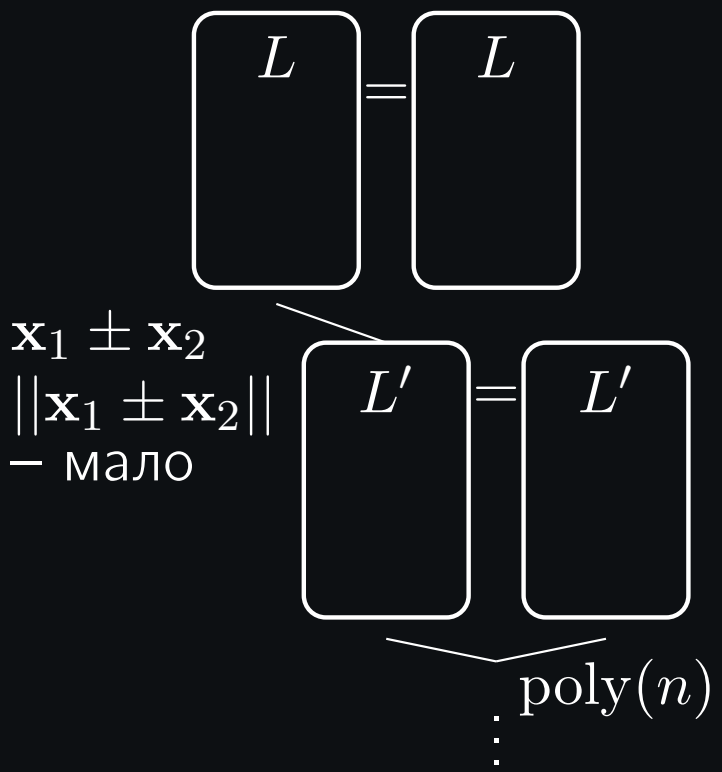
Предположение: вектора (нормализованные) в $|L|$ равномерно независимо распределены в S^{n-1}.



$$\frac{S_{\text{surface}}}{S_{\text{sphere}}} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)^n = \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^n$$

2-Просеивание (Nguyen-Vidick)

Идея: насыщать пространство векторами решётки так, чтобы суммы их пар давали короткие вектора



$$|L| = \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^{-n} = 2^{0.2075n}$$

$$T(\text{2-Просеивания}) = |L|^2 = 2^{0.415n}$$

o(n) опущены

Улучшенное просеивание с хэшированием

Как достичь $T = 2^{0.292n+o(n)}$?

Использовать метод "Ближнего соседа"(Near Neighbour)!
(aka Locality-Sensitive techniques)

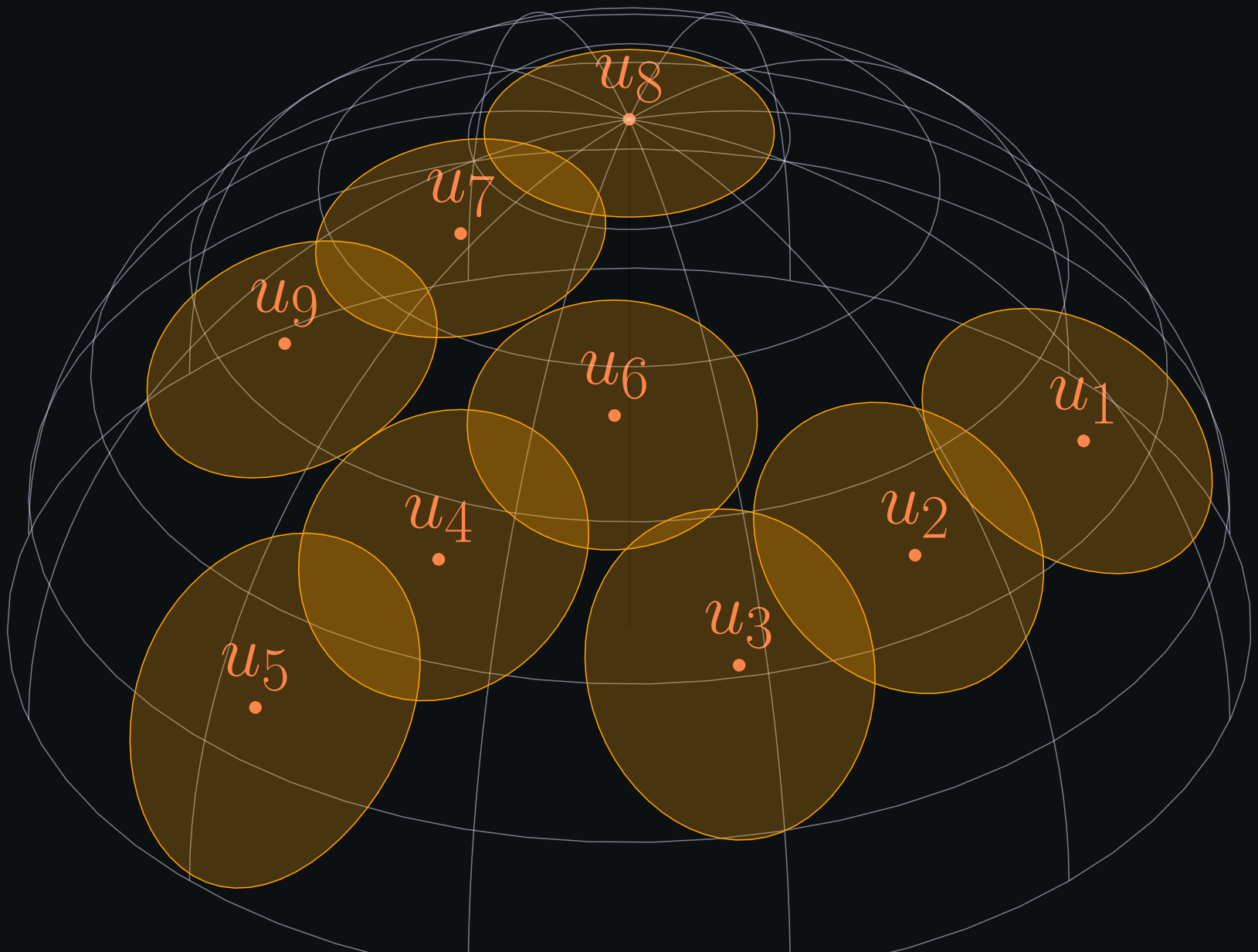
Улучшенное просеивание с хэшированием

Как достичь $T = 2^{0.292n+o(n)}$?

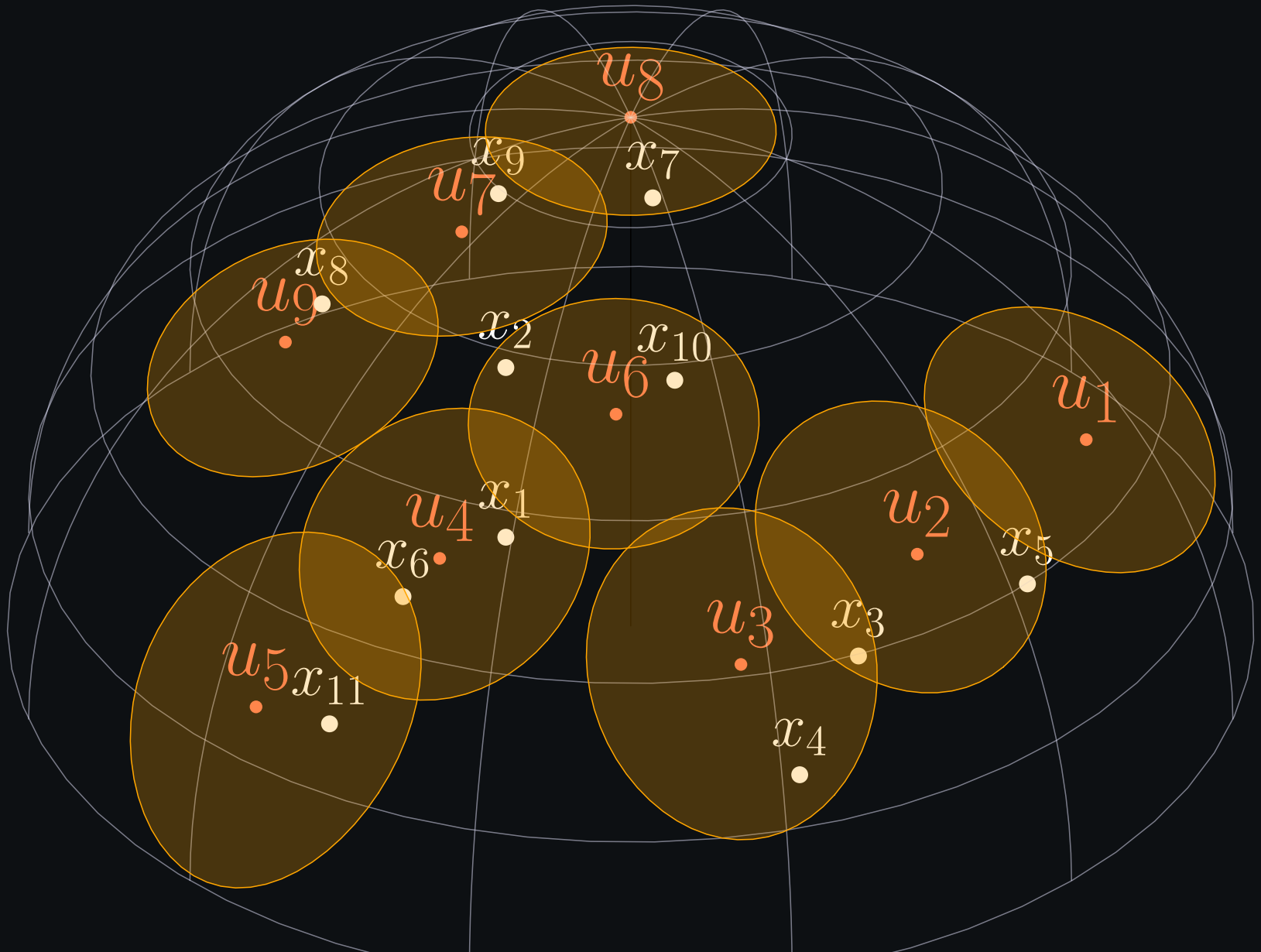
Использовать метод "Ближнего соседа"(Near Neighbour)!
(aka Locality-Sensitive techniques)

$$
\begin{aligned}
||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|| < ||\mathbf{x}_1|| &\iff \\
||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||^2 < ||\mathbf{x}_1||^2 &\iff \\
||\mathbf{x}_1||^2 - 2\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle + ||\mathbf{x}_2||^2 < ||\mathbf{x}_1||^2 &\iff \\
\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle > \frac{1}{2}||\mathbf{x}_2||^2 &
\end{aligned}
$$

Locality-sensitive filtering (Фильтрация по расстоянию) [BGJ15, BDGL16]



Locality-sensitive filtering (Фильтрация по расстоянию)[BGJ15, BDGL16]



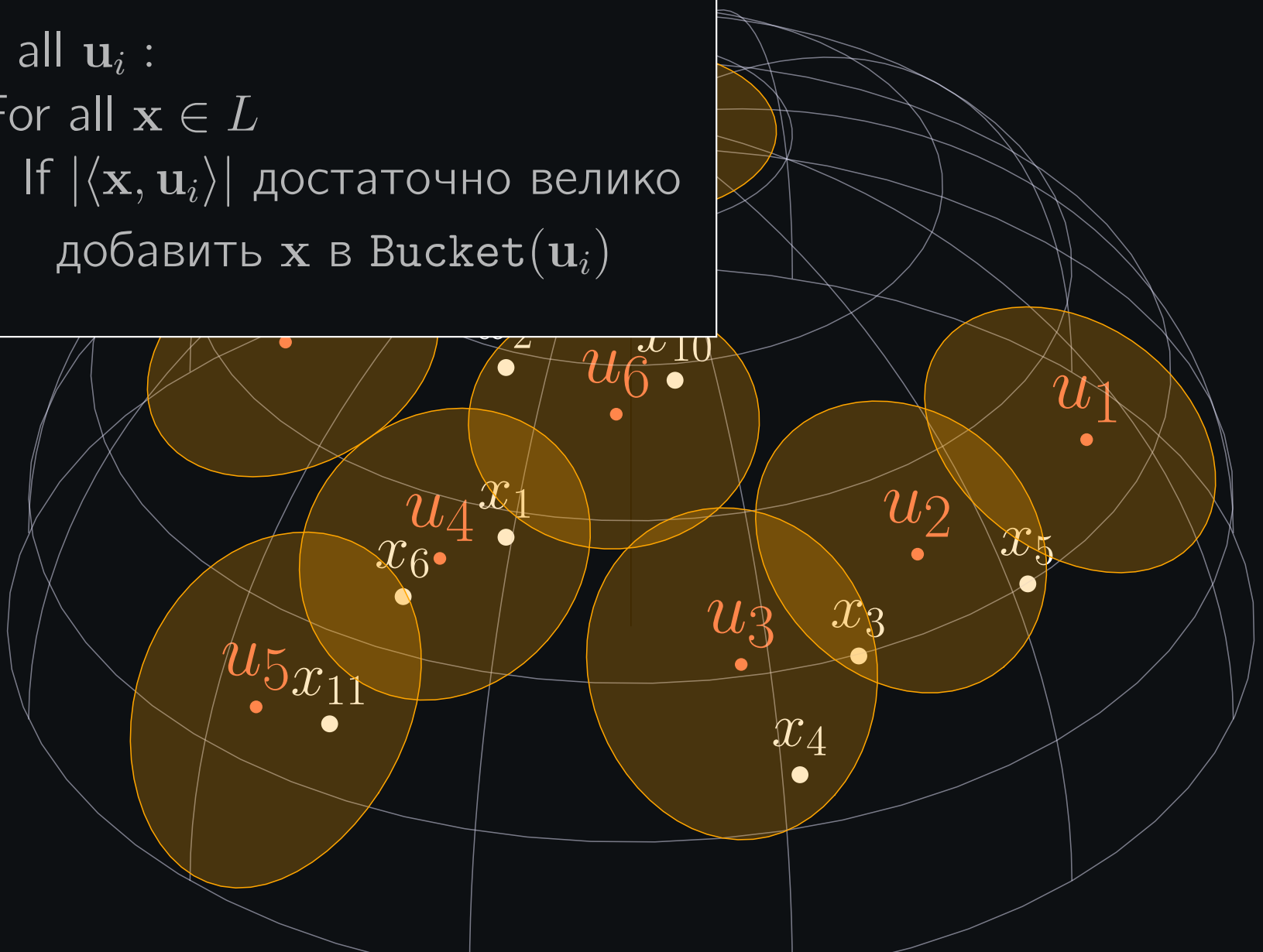
Locality-sensitive filtering (Фильтрация по расстоянию)[BGJ15, BDGL16]

u_i – центры "корзин"

$x_i \in L$

Locality-sensitive filtering (Фильтрация по расстоянию)[BGJ15, BDGL16]

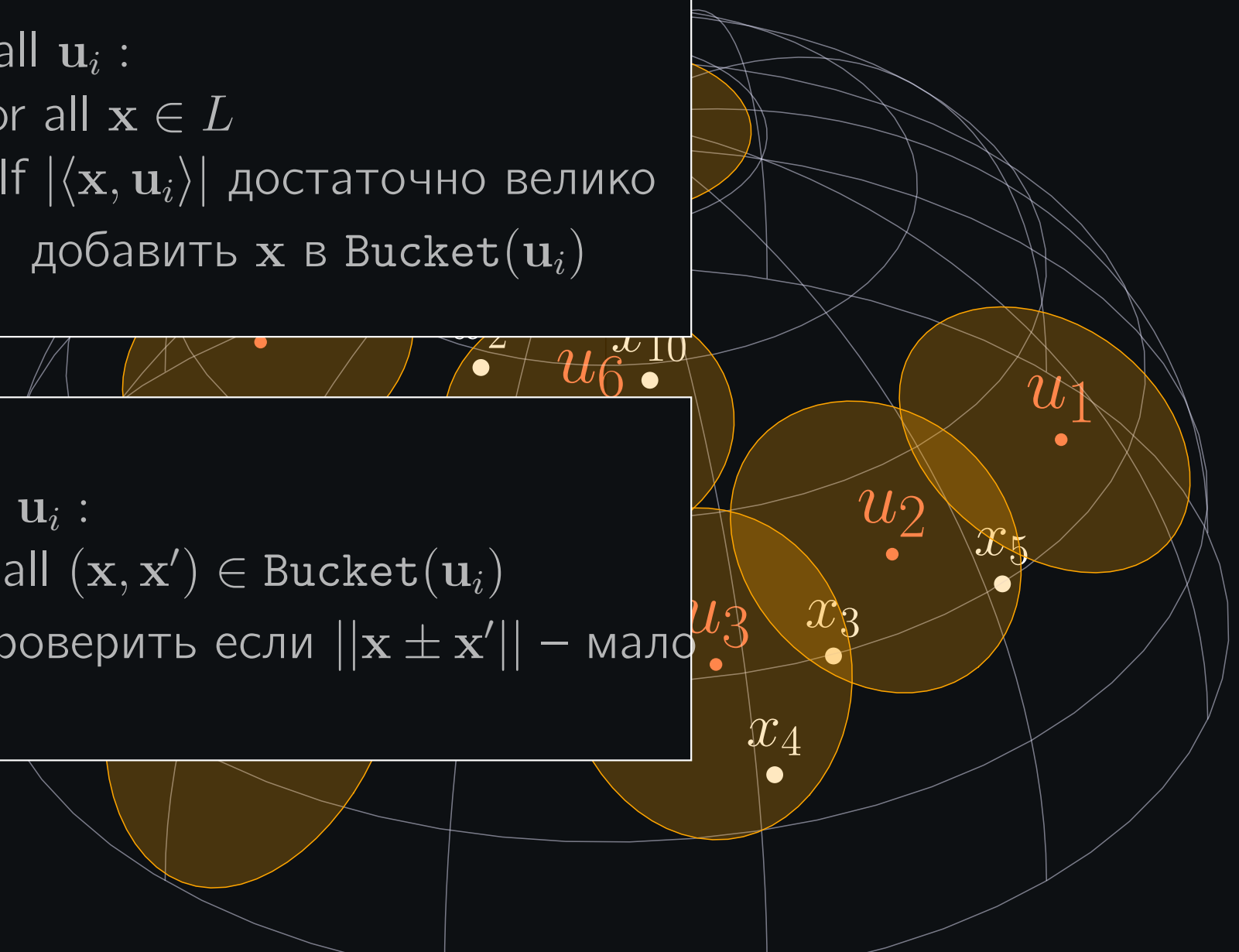
For all $\mathbf{u}_i$:
  For all $\mathbf{x} \in L$
    If $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle|$ достаточно велико
      добавить $\mathbf{x}$ в $\texttt{Bucket}(\mathbf{u}_i)$



Locality-sensitive filtering (Фильтрация по расстоянию)[BGJ15, BDGL16]

For all $\mathbf{u}_i$:
  For all $\mathbf{x} \in L$
    If $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle|$ достаточно велико
      добавить $\mathbf{x}$ в $\texttt{Bucket}(\mathbf{u}_i)$

For all $\mathbf{u}_i$:
  For all $(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \texttt{Bucket}(\mathbf{u}_i)$
    Проверить если $||\mathbf{x} \pm \mathbf{x}'||$ – мало



Locality-sensitive filtering (Фильтрация по расстоянию)[BGJ15, BDGL16]

For all $\mathbf{u}_i$:
  For all $\mathbf{x} \in L$
    If $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle|$ достаточно велико
      добавить $\mathbf{x}$ в $\texttt{Bucket}(\mathbf{u}_i)$

For all $\mathbf{u}_i$:
  For all $(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \texttt{Bucket}(\mathbf{u}_i)$
    Проверить если $||\mathbf{x} \pm \mathbf{x}'||$ – мало

Для $2^{(0.142+o(1))n}$ $\mathbf{u}_i$:

$$T = 2^{(0.349+o(1))n}$$

Если $\mathbf{u}_i$ имеют особую форму

$$T = 2^{(0.292+o(1))n}$$

Анализ I

1. Как эффективно найти релевантные центры u_i?
   [MO15, BDGL16]: Взять в качестве u_i кодовые слова из некоторого кода

   $$u \in C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_t =: U,$$

   C_i -сферический код длины $o(n)$.

   Для получения всех центров, содержащих $x = [x_1|x_2|\ldots|x_t]$, декодируем x_i относительно C_i.

Анализ I

1. Как эффективно найти релевантные центры u_i?
   [MO15, BDGL16]: Взять в качестве u_i кодовые слова из некоторого кода

   $$u \in C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_t =: U,$$

   C_i -сферический код длины $o(n)$.

   Для получения всех центров, содержащих $x = [x_1|x_2|\ldots|x_t]$, декодируем x_i относительно C_i.

2. Для каждого $x \in L$: нахождение всех релевантных $u_i \in U$ (построение хэш-таблиц)

   $$T_{\mathsf{Update}} = |U| \cdot \Pr_{u_i \in \mathcal{S}^{n-1}} [\langle u_i \, , x \rangle < \alpha] = |U| \cdot (1-\alpha^2)^{n/2}.$$

Анализ I

1. Как эффективно найти релевантные центры u_i?
   [MO15, BDGL16]: Взять в качестве u_i кодовые слова из некоторого кода

   $$u \in C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_t =: U,$$

   C_i -сферический код длины $o(n)$.

   Для получения всех центров, содержащих $x = [x_1|x_2|\ldots|x_t]$, декодируем x_i относительно C_i.

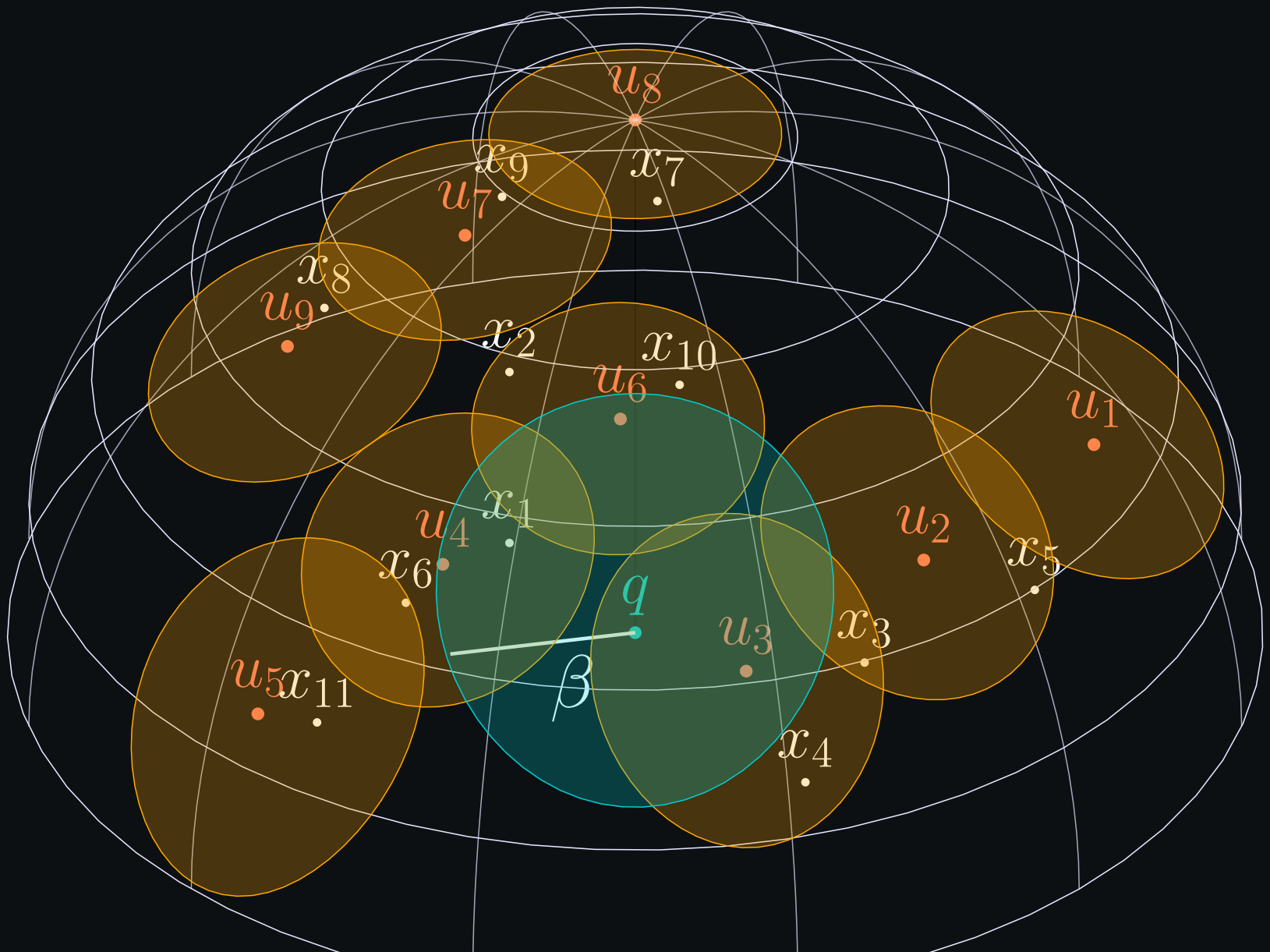
2. Для каждого $x \in L$: нахождение всех релевантных $u_i \in U$ (построение хэш-таблиц)

   $$T_{\text{Update}} = |U| \cdot \Pr_{u_i \in \mathcal{S}^{n-1}} [\langle u_i \, , x \rangle < \alpha] = |U| \cdot (1-\alpha^2)^{n/2}.$$

3. Запрос для каждого $x \in L$:

   $$T_{\text{Query}} = |U| \cdot \Pr_{u_i \in \mathcal{S}^{n-1}} [\langle u_i \, , x \rangle < \beta] = |U| \cdot (1-\beta^2)^{n/2}.$$

$|U|?$



$$|U|?$$

$|U|$ определено $P = 1/|U|$ при условии
$\langle x_3 \, , x_4 \rangle = 1/2$

1. $\langle u \, , x_3 \rangle = \alpha$
2. $\langle u \, , x_4 \rangle = \beta$

$$P = \Pr_{u \in \mathcal{S}^{n-1}} [\langle u \, , x_3 \rangle = \alpha, \langle u \, , x_4 \rangle = \beta \mid \langle x_3 \, , x_4 \rangle = 1/2]$$

$$= \frac{\left(\det \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \alpha & 1 & c \\ \beta & c & 1 \end{pmatrix} \right)^{n/2}}{\left(\det \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix} \right)^{n/2}}.$$

Для $\alpha = \beta = c = 1/2$, $P^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n/2} = 2^{0.292n}$

$$|U|?$$

$|U|$ определено $P = 1/|U|$ при условии $\langle x_3 \, , x_4 \rangle = 1/2$

1. $\langle u \, , x_3 \rangle = \alpha$
2. $\langle u \, , x_4 \rangle = \beta$

$$P = \Pr_{u \in \mathcal{S}^{n-1}} \left[\langle u \, , x_3 \rangle = \alpha, \langle u \, , x_4 \rangle = \beta \mid \langle x_3 \, , x_4 \rangle = 1/2 \right]$$

$$= \frac{\left(\det \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \alpha & 1 & c \\ \beta & c & 1 \end{pmatrix} \right)^{n/2}}{\left(\det \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix} \right)^{n/2}}.$$

$$|U|?$$

$|U|$ определено $P = 1/|U|$ при условии $\langle x_3 \, , x_4 \rangle = 1/2$

1. $\langle u \, , x_3 \rangle = \alpha$
2. $\langle u \, , x_4 \rangle = \beta$

$$P = \Pr_{u \in \mathcal{S}^{n-1}} [\langle u \, , x_3 \rangle = \alpha, \langle u \, , x_4 \rangle = \beta \mid \langle x_3 \, , x_4 \rangle = 1/2]$$

$$= \frac{\left(\det \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \alpha & 1 & c \\ \beta & c & 1 \end{pmatrix} \right)^{n/2}}{\left(\det \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix} \right)^{n/2}}.$$

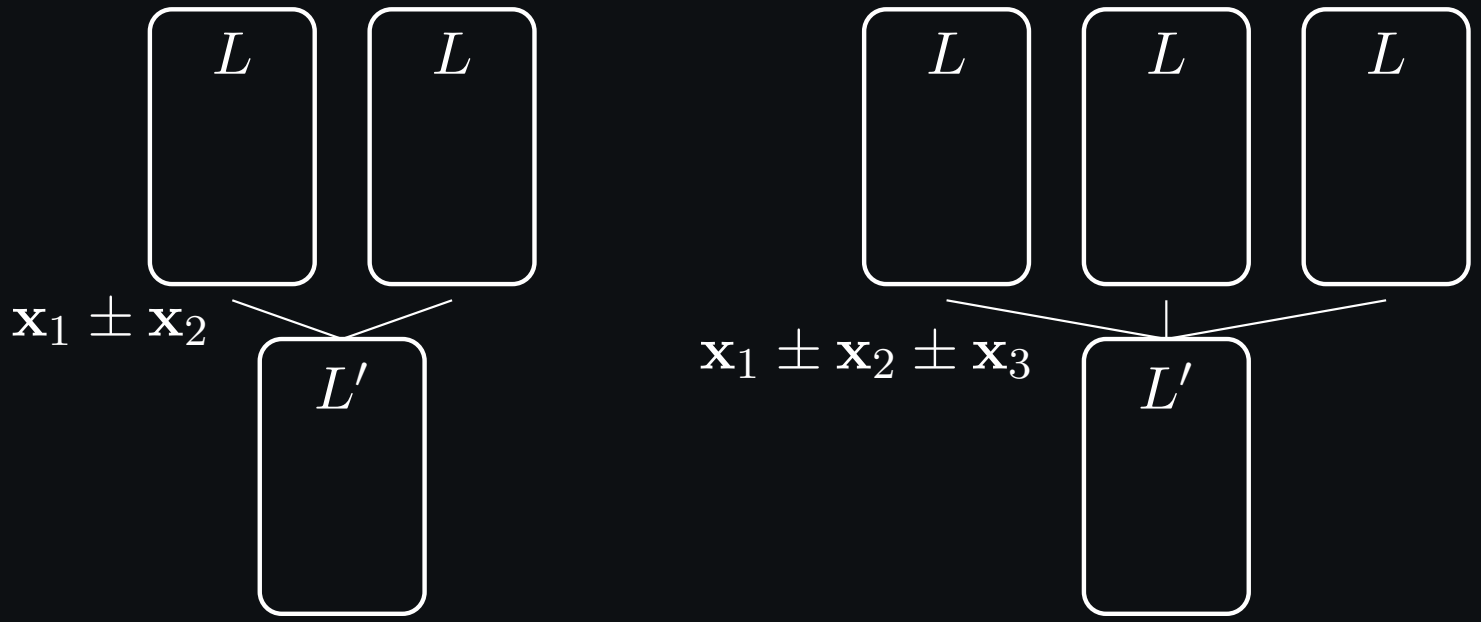
Для $\alpha = \beta = c = 1/2$, $P^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n/2} = 2^{0.292n}$

3-Просеивание [BLS16, HK17, HKL18]: уменьшение затрат памяти

Идея: насыщать пространство, пока тройки векторов не станут давать короткие суммы

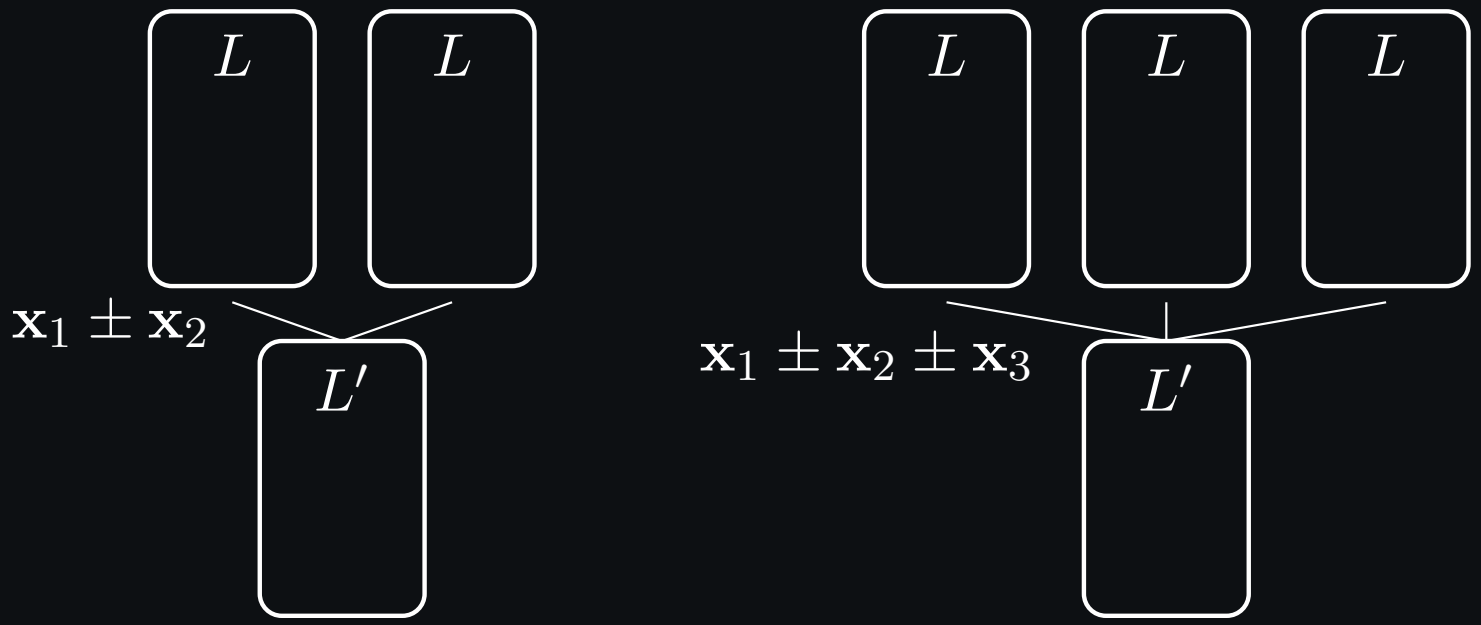
3-Просеивание [BLS16, HK17, HKL18]: уменьшение затрат памяти

Идея: насыщать пространство, пока тройки векторов не станут давать короткие суммы



3-Просеивание [BLS16, HK17, HKL18]: уменьшение затрат памяти

Идея: насыщать пространство, пока тройки векторов не станут давать короткие суммы



- Размер списка

$$|L| = |L|^3 \cdot \Pr[\ ||\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3|| \text{ small }\ ]$$

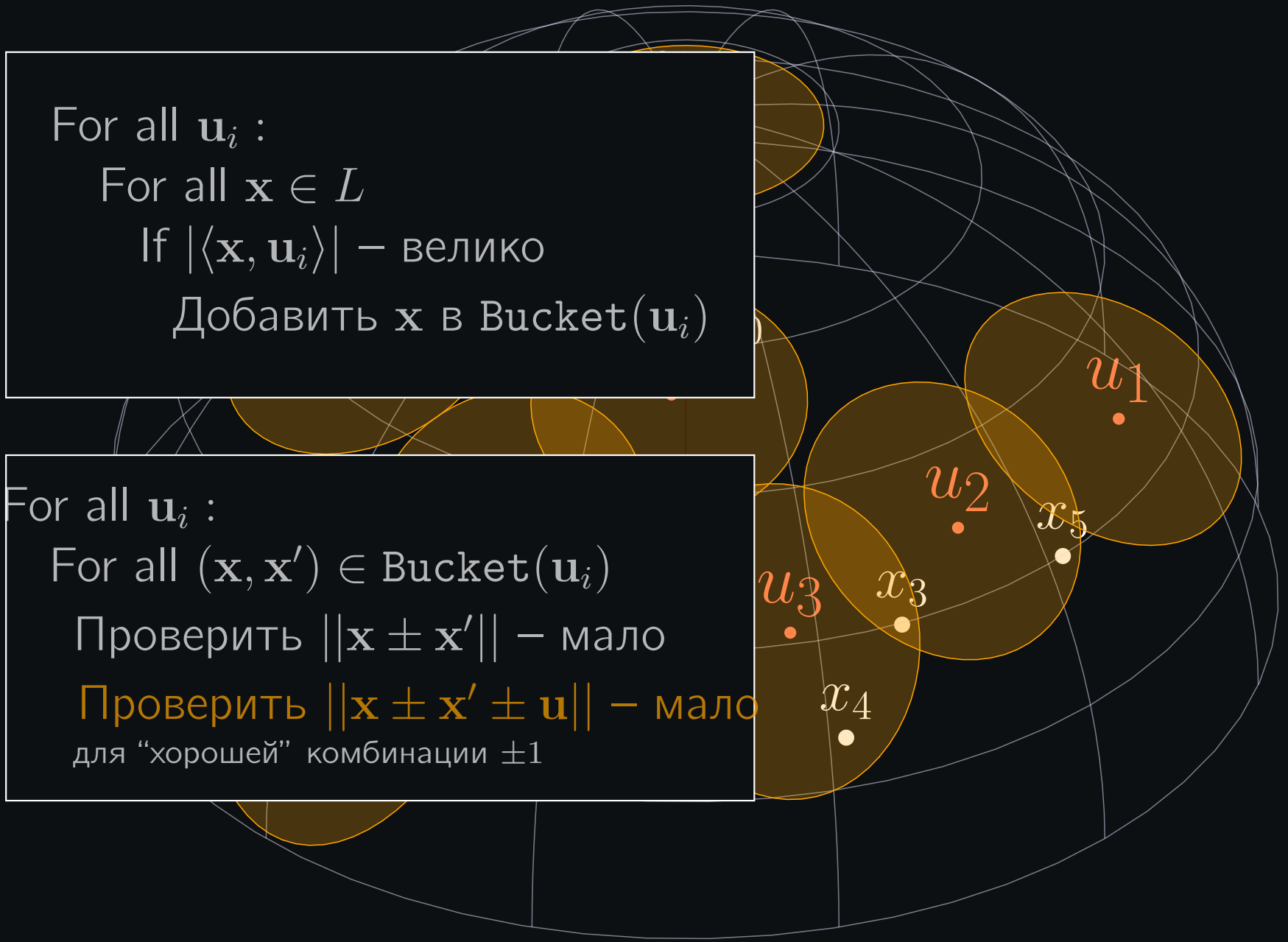
- Для 3-Просеивания имеем

$$|L| = 2^{0.179n}, \quad \text{сравним с } 2^{0.208n} \text{ для 2-Sieve}$$
$$T = 2^{0.359n}, \quad \text{сравним с } 2^{0.292n} \text{ для 2-Sieve}$$

Улучшенное 3-просеивание с хэшированием

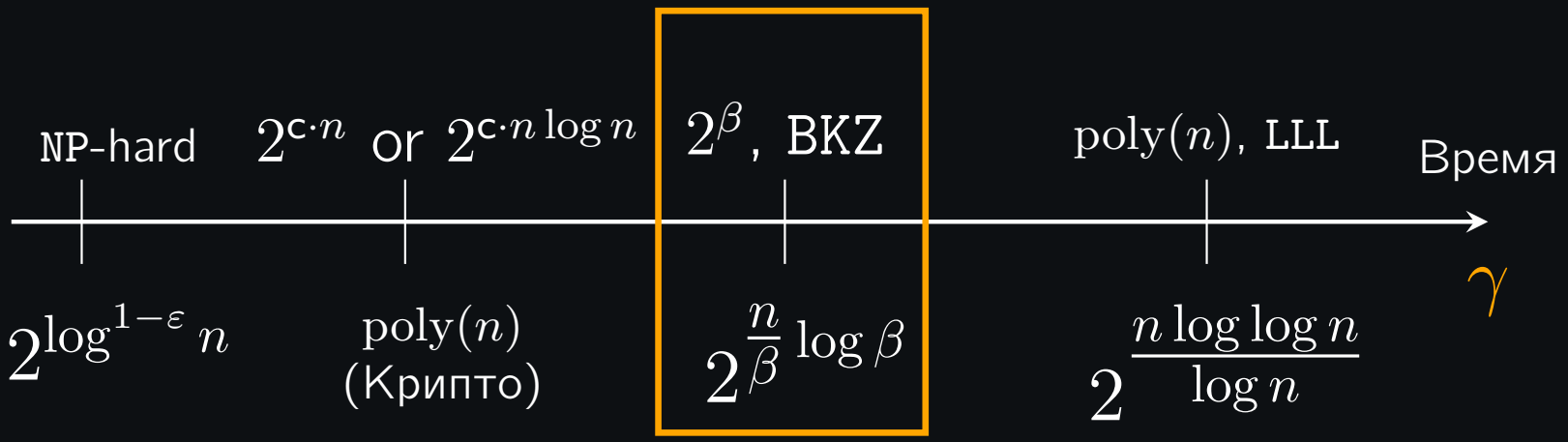
For all $\mathbf{u}_i$:
  For all $\mathbf{x} \in L$
    If $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle|$ – велико
      Добавить $\mathbf{x}$ в $\texttt{Bucket}(\mathbf{u}_i)$

For all $\mathbf{u}_i$:
  For all $(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \texttt{Bucket}(\mathbf{u}_i)$
    Проверить $||\mathbf{x} \pm \mathbf{x}'||$ – мало
    Проверить $||\mathbf{x} \pm \mathbf{x}' \pm \mathbf{u}||$ – мало
    для “хорошей” комбинации ± 1



Часть III

Решение челленджей SVP алгоритмами просеивания [1]



[1] или Как получить автомат

Реальные SVP задачи

- TU Darmstadt предлагает решить задачу 1.05-SVP [2]
- Для “случайных” решёток вида:

$$B = \begin{pmatrix} p & x_1 & \dots & x_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- Рекорд (до 2019) принадлежал Teruya et al.: решение 1.05-SVP в решётке ранга 150-dim алгоритмом перечисления за 2^{22} core-часов

[2] https://www.latticechallenge.org/svp-challenge/halloffame.php

Решения 1.05-SVP с помощью алгоритма G6K[3]

SVP dim	γ	Sieve Wall time	Total CPU time	Memory usage
155	1.00803	$14d\ 16h$	$1056d$	246 GiB
153	1.02102	$11d\ 15h$	$911d$	139 GiB
151	1.04411	$11d\ 19h$	$457.5d$	160 GiB
149	0.98506	$60h\ 7m$	$4.66kh$	59 GiB
147	1.03863	$123h\ 29m$	$4.79kh$	67.0 GiB
145	1.04267	$39h\ 3m$	$1496h$	37.7 GiB

[3] https://github.com/fplll/g6k

Темы для исследований

- Поведение алгоритма на ортогональных решетках
- Устранение эвристик
- Практические ускорения для реальных криптосистем
- Формулировка алгоритма для норм ℓ_∞, ℓ_1
- Формулировка просеивания для алгебраической нормы.