Лекция №9

Гауссова функция

I Анализ Фурье

Опр. 1 Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, т.ч. $\int |f| < \infty$.

Преобразование Фурье ф-ции f : $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$

$$y \mapsto \int\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x, y \rangle} dx$$

Лемма 1 (Св-ва преобразования Фурье)

1. Если $h(x) = f(T \cdot x)$, где $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - несингулярная, то
$$\hat{h}(y) = (\det T)^{-1} \hat{f}(T^{-t} \cdot y)$$

2. Если $h(x) = f(x+v)$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$, то
$$\hat{h}(y) = \hat{f}(y) \cdot e^{2\pi i \langle v, y \rangle}$$

3. Если $h(x) = f(x) \cdot e^{2\pi i \langle v, y \rangle}$, то
$$\hat{h}(y) = \hat{f}(y - v)$$

4. Определим $(f * g)(z) := \int\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \cdot g(z-x) dx$.

Тогда
$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

$\triangleleft$ 1. $\hat{h}(y) = \int\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(T \cdot x) \cdot e^{-2\pi i \langle x, y \rangle} dx = \left\{ \begin{array}{l} \langle x, y \rangle = x^t \cdot y = x^t \cdot T^t \cdot (T^t)^{-1} \cdot y \\ = (T \cdot x)^t \cdot (T^{-t} \cdot y) = \langle T \cdot x, T^{-t} y \rangle \end{array} \right.$

$= \int\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(T \cdot x) e^{-2\pi i \langle Tx, T^{-t} \cdot y \rangle} dx = \left\{ \begin{array}{l} x' = T \cdot x \\ dx' = \det T \cdot dx \end{array} \right\} = \frac{1}{\det T} \int\limits_{x' \in \mathbb{R}^n} f(x') \cdot$

$e^{-2\pi i \langle x', T^{-t} y \rangle} dx' = \frac{1}{\det T} \cdot \hat{f}(T^{-t} \cdot y)$.

2–3. – см. упр-ия.

4. $\widehat{f*g}\,(y) = \int\limits_{z\in\mathbb{R}^n} (f*g)(z)\cdot e^{-2\pi i\langle y,z\rangle}\,dz =$

$$= \int\limits_{\substack{z\in\mathbb{R}^n\\ x\in\mathbb{R}^n}} f(x)\,g(z-x)\,e^{-2\pi i\langle y,z\rangle}\,dz\,dx \overset{\substack{z'=z-x\\ dz'=dz}}{=} \int\limits_{\substack{z'\in\mathbb{R}^n\\ x\in\mathbb{R}^n}} f(x)\cdot g(z')\underbrace{e^{-2\pi i\langle y,z'+x\rangle}}_{e^{-2\pi i\langle y,z'\rangle}\cdot e^{-2\pi i\langle y,x\rangle}}\,dz'dx$$

$$= \underbrace{\int\limits_{z'\in\mathbb{R}^n} g(z')\cdot e^{-2\pi i\langle y,z'\rangle}\,dz'}_{\hat g(y)} \cdot \underbrace{\int\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)\cdot e^{-2\pi i\langle y,x\rangle}\,dx}_{\hat f(y)} = \hat g(y)\cdot\hat f(y) \quad \blacktriangleright$$

Лемма 2 (св-ва преобразования Фурье, ч.2)

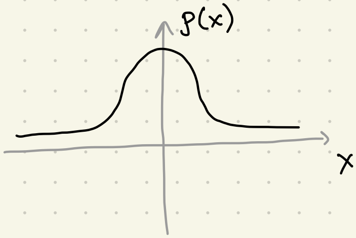
1. $\hat{\hat f}(x) = f(-x)$

$\hat{\hat{\hat{\hat f}}}(x) = f(x)$

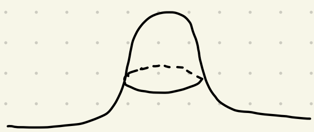
2. $p(x) = e^{-\pi\|x\|^2}$ – Гауссова ф-ия

$\hat p(x) = p(x)$. (иначе, Гауссова ф-ия – это айгенфции преобразования Фурье).

В $\mathbb{R}^1$



В $\mathbb{R}^2$



◁ 2. $\hat p(x) = \int\limits_{x\in\mathbb{R}^n} p(x)\cdot e^{-2\pi i\langle x,y\rangle}\,dx = \int\limits_{x\in\mathbb{R}^n} e^{-\pi\|x\|^2-2\pi i\langle x,y\rangle}\,dx$

$$= \int\limits_{x\in\mathbb{R}^n} e^{-\pi\|x\|^2-2\pi i\langle x,y\rangle - i^2\pi\|x\|^2 + i^2\pi\|y\|^2}\,dx = \int\limits_{x\in\mathbb{R}^n} e^{-\pi(\|x\|^2+2i\langle x,y\rangle+i^2\|y\|^2)}\cdot e^{-i^2\pi\|y\|^2}\,dx$$

$$= e^{-\pi\|y\|^2} \cdot \int_{x\in\mathbb{R}^n} e^{-\pi(\|x\|+i\|y\|)^2}\,dx = e^{-\pi\|y\|^2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\pi}} = e^{-\pi\|y\|^2}$$

$$\int_{x\in\mathbb{R}^n} e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{a}{\pi}}$$