Практика № 2
11.09.23

1 Код Адамара

Бинарный код Адамара, $\mathsf{Had_r}$ – это $[2^r, r]_2$- код с порождающей матрицей $r \times 2^r$, столбцы которой представляют всевозможные битовые строки длины r. Докажите, что минимальное расстояние кода $\mathsf{Had_r}$ равно 2^{r-1}.

2 Классы смежности

Докажите пункты 1–5 теоремы:

Теорема 1. Для $[n, k]_q$– линейного кода C справедливо

1. $\forall u \in \mathbb{F}_q^n$ существует класс смежности C, содержащий u
2. $\forall u \in \mathbb{F}_q^n$ имеем $|C + u| = |C| = q^k$
3. $\forall u, v \in \mathbb{F}_q^n$ из $u \in C + v$ следует $C + u = C + v$
4. $\forall u, v \in \mathbb{F}_q^n$ либо $C + u = C + v$, либо $(C + u) \cap (C + v) = \emptyset$
5. Существует q^{n-k} различных классов смежности C.

3 Линейные коды

Пусть C_1, C_2 – линейные коды длины n, заданные над $\mathbb{F}_q$ порождающими матрицами G_1, G_2. Определим следующие коды

- $C_3 = C_1 \cup C_2$
- $C_4 = C_1 \cap C_2$
- $C_5 = C_1 + C_2 = \{c_1 + c_2 \,:\, c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\}$
- $C_6 = \{(c_1 \,|\, c_2) \,:\, c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\}$, где $(\cdot|\cdot)$ обозначает конкатинацию слов.

Для $i = 1, \ldots 6$ обозначим за k_i – размерность кода $\log_q |C_i|$, а за d_i– минимальное расстояние кода C_i. Положим $k_1, k_2 > 0$.

1. Докажите, что C_3 – линейный тогда и только тогда, когда либо $C_1 \subseteq C_2$, либо $C_2 \subseteq C_1$.
2. Докажите, что коды C_4, C_5, C_6– линейные
3. Докажите, что если $k_4 > 0$, то $d_4 \geq \max\{d_1, d_2\}$
4. Докажите, что $k_5 \leq k_1 + k_2$, и что равенство достигается тогда и только тогда, когда $k_4 = 0$
5. Докажите, что $d_5 \leq \min\{d_1, d_2\}$

6. Докажите, что
$$\begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}$$
является порождающей матрицей для C_6, а следовательно, $k_6 = k_1 + k_2$

7. Докажите, что $d_6 = \min\{d_1, d_2\}$.