

## ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ № 1

Опубликовано 10.09.21, Срок сдачи: 24.09.21 (23:59)

---

### Инструкция

1. Решения принимаются *исключительно* до дэдлайна, указанного в шапке ДЗ. Время сдачи указано в соответствии с Калининградским часовым поясом.
2. Решения должны быть выполнены индивидуально.
3. Решения должны быть написано разборчиво, все утверждения должны быть аргументированы.
4. Решения принимаются по электронной почте `elenakirshanova@gmail.com` с четкой пометкой, кто автор присланных решений.
5. Все решения должны быть оформлены в **один** файл формата pdf, которые должен иметь адекватное соотношение размер-качество (весь файл должен занимать не более 15Mb).

## 1 Код Адамара

Бинарный код Адамара,  $\text{Had}_r$  – это  $[2^r, r]_2$ - код с порождающей матрицей  $r \times 2^r$ , столбцы которой представляют всевозможные битовые строки длины  $r$ . Докажите, что минимальное расстояние кода  $\text{Had}_r$  равно  $2^{r-1}$ .

## 2 Линейные коды

Пусть  $C_1, C_2$  – линейные коды длины  $n$ , заданные над  $\mathbb{F}_q$  порождающими матрицами  $G_1, G_2$ . Определим следующие коды

- $C_3 = C_1 \cup C_2$
- $C_4 = C_1 \cap C_2$
- $C_5 = C_1 + C_2 = \{c_1 + c_2 : c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\}$
- $C_6 = \{(c_1 | c_2) : c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\}$ , где  $(\cdot | \cdot)$  обозначает конкатинацию слов.

Для  $i = 1, \dots, 6$  обозначим за  $k_i$  – размерность кода  $\log_q |C_i|$ , а за  $d_i$  – минимальное расстояние кода  $C_i$ . Положим  $k_1, k_2 > 0$ .

1. Докажите, что  $C_3$  – линейный тогда и только тогда, когда либо  $C_1 \subseteq C_2$ , либо  $C_2 \subseteq C_1$ .
2. Докажите, что коды  $C_4, C_5, C_6$  – линейные
3. Докажите, что если  $k_4 > 0$ , то  $d_4 \geq \max\{d_1, d_2\}$
4. Докажите, что  $k_5 \leq k_1 + k_2$ , и что равенство достигается тогда и только тогда, когда  $k_4 = 0$

5. Докажите, что  $d_5 \leq \min\{d_1, d_2\}$

6. Докажите, что

$$\begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}$$

является порождающей матрицей для  $C_6$ , а следовательно,  $k_6 = k_1 + k_2$

7. Докажите, что  $d_6 = \min\{d_1, d_2\}$ .

### 3 Задача о заключенных

В тюрьме сидят семеро заключенных (в оригинальной версии задачи была темница и Минотавр, но мы цивилизованные люди). На всех заключенных надевают по одной шляпе либо красного, либо синего цвета так, что каждый заключенный видит цвета шляп других заключенных, но не свой.

В фиксированное время все заключенные декларируют свой выбор в надежде угадать цвет своей шляпы: либо 'красный', либо 'черный', либо 'пасс'. Заключенные не имеют права передавать друг другу какую-либо информацию ни в какое время.

Если все заключенные сказали 'пасс', они все остаются в тюрьме. Если хотя бы один из них не угадал свой цвет, они также все остаются в тюрьме. Если все заключенные, кто угадывал свой цвет, корректно его угадал (таковых должно быть как минимум 1), они все выходят на свободу.

Предложите и обоснуйте стратегию, в которой заключенные имеют вероятность  $7/8$  выйти из тюрьмы. Объясните, как ваша стратегия связано с кодом Хэмминга  $[7, 4, 3]$ . Если бы заключенных было не 7, а 15, имели бы они БОЛЬШОЙ успех на положительный для них исход?